FGN, Ap 2

Théorème de Fejér

L 202
L 203
L 209
L 241
L 246

Th de Fejér : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue, 2π-périodique

On définit $(\sigma_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=-k}^{k} c_\ell(f) e^{i\ell x}$

alors $(\sigma_n(f))$ converge uniformément vers f.

Démonstration : ① Mq $\forall x \in \mathbb{T}$, $\sigma_n(f) = f * K_n$ avec $K_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=-k}^{k} e^{i\ell\cdot}$

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=-k}^{k}\int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-i\ell t}\frac{dt}{2\pi}\cdot e^{i\ell x}$

$$= \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=-k}^{k} e^{i\ell(x-t)} f(t)\frac{dt}{2\pi}$$

$$= \int_{\mathbb{T}} K_n(x-t) f(t)\frac{dt}{2\pi} = K_n * f(x)$$

② Mq $\forall x \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $K_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2$

On a $K_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=-k}^{k} e^{i\ell x} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{-ikx} - e^{i(k+1)x}}{1-e^{ix}}$

$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-e^{ix}}\cdot\left(\frac{1-e^{-inx}}{1-e^{-ix}} - \frac{e^{ix}-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\frac{1}{(1-e^{ix})^2}\cdot\left(e^{-i(n-1)x} - 2e^{ix} + e^{i(n+1)x}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(e^{ix}-1)^2}\cdot\left(e^{i\frac{n+1}{2}x} - e^{-i\frac{n-1}{2}x}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{e^{i\frac{x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}}\cdot\frac{e^{i\frac{nx}{2}} - e^{-i\frac{nx}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2 \geqslant 0$$

③ On a de plus, $\forall x \in 2\pi\mathbb{Z}$, $K_n(x) = n \geqslant 0$

- D'où, $\forall x \in \mathbb{R}$, $K_n(x) \geqslant 0$
- $\|K_n\|_1 = \int_0^{2\pi} K_n(x)\,\frac{dx}{2\pi} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=-k}^{k}\int_0^{2\pi} e^{i\ell x}\,\frac{dx}{2\pi} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1 = 1$
- $\forall \alpha \in]0,\pi[$, $\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,\mathbb{1}_{\{|x|\geqslant\alpha\}}\,\frac{dx}{2\pi}$

$$\leqslant \int_{-\pi}^{-\alpha} \frac{1}{n}\,\frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\,\frac{dx}{2\pi} + \int_{\alpha}^{\pi}\frac{1}{n}\,\frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\,\frac{dx}{2\pi}.$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\left(\int_{-\pi}^{-\alpha}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{-\alpha}{2}\right)}\,\frac{dx}{2\pi} + \int_{\alpha}^{\pi}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\,\frac{dx}{2\pi}\right) = \frac{1}{n}\cdot C^{te} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

④ $\forall x \in \mathbb{T}$, on a :

$$|\sigma_n(f)(x) - f(x)| = |(K_n * f)(x) - f(x)| = \left|\int_{\mathbb{T}} K_n(y) f(x-y)\,\frac{dy}{2\pi} - \int_{\mathbb{T}} K_n(y) f(x)\,\frac{dy}{2\pi}\right|$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{T}} K_n(y)\cdot|f(x-y) - f(x)|\,\frac{dy}{2\pi}.$$

Or f est continue sur le compact $\mathbb{T}$,
donc d'après le th de Heine, elle y est uniformément continue
Soit $\varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, $\forall x, y \in \mathbb{T}$, $d(x,y) < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
On pose $A = \{y \in \mathbb{T} : d(y,0) < \alpha\}$

alors $|\sigma_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \int_A K_n(y)\,|f(x-y) - f(x)|\,\frac{dy}{2\pi} + \int_{c_A} K_n(y)\,|f(x-y) - f(x)|\,\frac{dy}{2\pi}$

$$\leqslant \varepsilon \int_A K_n(y)\,\frac{dy}{2\pi} + 2\|f\|_\infty \int_{c_A} K_n(y)\,\frac{dy}{2\pi}$$

$$\leqslant \varepsilon + 2\|f\|_\infty \cdot \int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)\cdot \mathbb{1}_{\{|y|\geqslant \arccos(\alpha)\}}\,\frac{dy}{2\pi}$$

D'après ③, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant N$, $\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \leqslant 2\varepsilon$

D'où $(\sigma_n(f))$ CVU vers f sur $\mathbb{T}$.